JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 25, 391–411 (1977)

Méthodes de contrôle optimal en analyse complexe. I. Résolution d'équations de Monge Ampère

BERNARD GAVEAU

18, rue Gassendi, 59000 Lille, France

Communicated by Paul Malliavin

Received December 20, 1976; revised March 21, 1977

INTRODUCTION

En analyse complexe à 1 variable, une remarque fondamentale est que les fonctions harmoniques sont parties réelles de fonctions holomorphes et l'étude de l'analyse à 1 variable se ramène souvent à la théorie du potentiel pour le laplacien usuel de $\mathbb{C}$. En plusieurs variables, les parties réelles de fonctions holomorphes sont harmoniques pour tout laplacien d'une métrique kählérienne [8]; cette remarque a été utilisée systématiquement lorsque la métrique est la métrique euclidienne depuis Poincaré (oeuvres t. 4). En général, on fixe une métrique kählérienne adaptée au problème que l'on se propose d'aborder et on utilise les propriétés des problèmes elliptiques associés. C'est ainsi qu'ont été obtenus par P. Malliavin des renseignements sur les distributions de zéros et les valeurs frontières des fonctions de plusieurs variables dans certains domaines (voir [9] pour une discussion générale).

Dans [6], est envisagée une méthode différente: pour étudier les solutions communes à deux équations semi elliptiques, on mélange de façon aléatoire, les deux théories du potentiel de ces équations.

Nous nous proposons, dans ce travail et sa suite, de montrer comment on peut résoudre certains problèmes d'analyse complexe en considérant simultanément toutes les métriques kählériennes.

Ici nous envisageons le problème de Dirichlet pour une équation de Monge Ampère complexe dans un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$; certains résultats obtenus par Bedford et Taylor [1] sur ce problème sont rappelées

ISSN 0022-1236

dans 1. L'idée de base est que le problème est équivalent à un problème de programmation dynamique de Bellman et donc de contrôle optimal l'espace des paramètres de contrôle étant grosso modo, l'espace des opérateurs de type kählérien (voir 2). La difficulté provient du fait que sur l'espace de contrôle envisagé, les opérateurs ne sont pas uniformément elliptiques de sorte que les méthodes classiques ne s'appliquent pas. La méthode que nous utiliserons est la suivante; on introduit à priori la fonctionnelle dont le minimum u est la solution du problème de contrôle. On montre que ce minimum est une fonction continue, plurisousharmonique dans le domaine de façon directe, sans chercher à montrer qu'elle est solution de l'équation de programmation dynamique (ce qui est en général très difficile même dans le cas strictement elliptique); puis on montre que ce minimum est solution généralisée au sens de [1] du problème de Monge Ampère envisagé; le 7 résout ensuite des équations avec second membre fonction de l'inconnue par une méthode de linéarisation partielle.

La suite de ce travail qui est poursuivie en collaboration avec A. Debiard, appliquera cette méthode à certains problèmes d'algèbres de fonctions (en particulier, classification des mesures de Jensen et construction d'enveloppes polynomialement convexes).

Notons enfin que cette situation se retrouve chaque fois que l'on a un système différentiel du 1er ordre; c'est le cas en particulier de la topologie algébrique à la quelle sera consacrée un travail ultérieur. Ces résultats ont été annoncés dans deux notes aux *Comptes Rendus* [4, 5].

Je tiens à remercier Monsieur Paul Malliavin pour les entretiens que j'ai pu avoir avec lui sur les méthodes employées ici, ainsi que Monsieur Eric Bedford pour les conversations que j'ai eues sur le problème de Monge Ampère.

Je suis heureux aussi de pouvoir remercier Monsieur Amédée Debiard et Monsieur Guy Laville pour toutes les discussions que nous avons eues ensemble.

1. Préliminaires sur le problème de Monge Ampère complexe

Etant donné un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$, une fonction $f \geqslant 0$ sur D et une fonction φ sur ∂D, on cherche une fonction u plurisousharmonique dans D satisfaisant

$$\begin{aligned} (i\partial\bar{\partial}u)^{\wedge n} &= f^n \qquad \text{dans } D, \\ u &= \varphi \qquad \text{sur } \partial D. \end{aligned}$$

Lorsque $f = 0$ ce problème est le problème introduit par Bremerman [2]; dans le cas général, ce problème a été traité par Bedford et Taylor [1].

(1) Pour cela, on donne d'abord un sens à $(i\partial\bar{\partial}u)^{\wedge n}$ pour toute fonction u plurisousharmonique continue sur D, ceci est une mesure $\geqslant 0$.

(2) Pour toute fonction u plurisousharmonique, on définit $\Phi(u) = ((i\partial\bar{\partial}u)^{\wedge n})^{1/n}$ lorsque u est de classe C^2 et on étend la définition à toutes les

fonctions plurisousharmoniques, comme mesure $\geqslant 0$. Nous nous servirons souvent du résultat suivant [1]:

Si u est plurisousharmonique continue sur D, et si $\partial_i \bar{\partial}_j u = \varphi_{i\bar{j}}\, dv + v_{i\bar{j}}$ avec $v_{i\bar{j}}$ étrangère à dv et $\varphi_{i\bar{j}} \in L^1_{\mathrm{loc}}$ (dv étant le volume euclidien de $\mathbb{C}^n$), alors

(*) $\Phi(u) = (\text{dét}(\varphi_{i\bar{j}})_{i\bar{j}})^{1/n}$,

(**) $\Phi(u)^n \leqslant (i\partial\bar{\partial}u)^{\wedge n}$,

(***) *si u_ϵ est une suite de fonctions plurisousharmoniques C^2 qui tend vers u telle que la suite $(i\partial\bar{\partial}u_\epsilon)^{\wedge n}$ soit bornée au sens des mesures, alors $\Phi(u_\epsilon) \to \Phi(u)$. En particulier cela est vrai pour la suite régularisée C^2* psh *d'une fonction* psh *continue.*

(3) Pour traiter le problème de Monge Ampère complexe, Bedford et Taylor généralisent la méthode des enveloppes supérieures de Bremermann de la façon suivante: ils introduisent la classe $\mathscr{B}(f, \varphi)$ des fonctions v plurisousharmoniques sur D, telles que

$$\limsup_{z \to z_0 \in \partial D} v(z) \leqslant \varphi(z_0) \qquad \forall z_0 \in \partial D,$$
$$\Phi(v) \geqslant f,$$

et ils démontrent que *si la classe $\mathscr{B}(f, \varphi)$ n'est pas vide, si $f \in L^1$ et si le* sup $\mathscr{B}(f, \varphi) = w$ *est continu, alors w est solution au sens généralisé du problème de Monge Ampère*, i.e.,

$$\begin{aligned} \Phi(w) &= f \qquad \text{sur } D, \\ w &= \varphi \qquad \text{sur } \partial D. \end{aligned}$$

2. Problème de contrôle optimal associé à une équation de Monge Ampère complexe

Nous partons initialement du lemme d'algèbre linéaire élémentaire suivant:

Lemme 1. *Soient A, B des matrices complexes $n \times n$ hermitiennes, positives, B étant fixée. Alors on a:*

$$\operatorname{Inf} \operatorname{Trace}(AB) = n(\alpha \text{ dét } B)^{1/n} \tag{1}$$

où l'infimum porte sur les matrices A satisfaisant la condition supplémentaire dét $A \geqslant \alpha$.

Preuve. Diagonalisons B et posons $u_i = a_{ii} b_{ii}$ comme A et B sont hermitiennes positives, $u_i \geqslant 0$ et on a

$$(1/n) \sum_{i=1}^{n} u_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} u_i \right)^{1/n}$$

par l'inégalité de la moyenne arithmétique et géométrique; pour voir que l'infimum est atteint il suffit de le voir par exemple si dét $B = 1$ lorsque dét $B \neq 0$. Prenons alors $a_{ii} = b_{ii}^{-1}\alpha^{1/n}$; et $a_{ij} = 0$. Alors cela donne exactement l'infimum et dét $A = \alpha$. Lorsque dét $B = 0$, l'un des b_i, disons b_n est 0. On peut prendre les $a_{ii} i \neq n$ aussi petits que l'on veut et a_{nn} arbitrairement grand pour rendre dét $A \geqslant \alpha$. Alors Trace(AB) est aussi petit qu'on veut.

Nous allons maintenant montrer comment le lemme 1 réduit le problème de Monge Ampère complexe à une équation de programmation dynamique. Pour toute matrice $\mathbf{a} = (a_{ij}(z))_{ij}$ complexe $n \times n$, hermitienne et positive, considérons *l'opérateur kählérien.*

$$\Delta_{\mathbf{a}} = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(z)(\partial^2/\partial z_i\, \partial \bar{z}_j). \tag{2}$$

Si u est fonction C^2 plurisousharmonique, on a donc Inf $\Delta_{\mathbf{a}} u = (n/2)(\text{dét}(\partial^2 u/\partial z_i\, \partial \bar{z}_j))^{1/n}$ où l'infimum porte sur l'ensemble des matrices $(a_{ij}(z))_{i\bar{j}}$ hermitiennes $\geqslant 0$ avec dét $\mathbf{a} \geqslant 1$; cela est une reformulation dans notre contexte du lemme 1. Par suite un problème de Monge Ampère

$$\text{dét}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_j}\right) \equiv (i\partial\bar{\partial}u)^{\wedge n} = f^n \qquad \text{dans } D,$$

$$u = \varphi \qquad \text{sur } \partial D,$$

$$u \text{ plurisousharmonique},$$

est formellement équivalent au problème de programmation dynamique de Bellman.

$$\begin{aligned} \text{Inf}\, \Delta_{\mathbf{a}} u &= (n/2) f \qquad && \text{dans } D, \\ u &= \varphi && \text{sur } \partial D, \\ & u \text{ plurisousharmonique}, \end{aligned} \tag{3}$$

l'infimum portant toujours sur la classe des matrices complexes $n \times n$ hermitiennes $\geqslant 0$ avec dét $\mathbf{a} \geqslant 1$. Cet infimum est le même que celui obtenu en travaillant avec des matrices $a_{i\bar{j}}$ constantes, toujours par le lemme 1, évidemment la matrice réalisant l'infimum dépend en général du point de D où l'on se trouve.

C'est maintenant le problème de Bellman que nous allons résoudre. Nous voyons également pourquoi le problème de Monge Ampère n'est pas un problème elliptique; dans la formulation de Bellman, nous devons prendre l'infimum sur les matrices de symbole principal de déterminant $\geqslant 1$. *Le problème de Bellman que nous avons n'est donc pas elliptique.* La méthode que nous allons employer pour le résoudre sera donc différente de celles utilisées habituellement puisque les hypothèses usuelles sur les équations de Bellman consistent à prendre un infimum sur une classe d'opérateurs elliptiques dont on a *à priori une borne inférieure commune d'ellipticité* (voir [3, 10]).

Notons maintenant $(b_1 \cdots b_n)$ le brownien standard de $\mathbb{C}^n$, issu de 0 et $(\Omega, \mathscr{B}_t, P)$ son espace de probabilités. Considérons l'espace K des matrices complexes hermitiennes $n \times n$ positives, $\tilde{K}$ le sous espace de K des matrices $\sigma = (\sigma_{ij})_{ij}$ avec

$$\text{dét}\, \sigma\sigma^* \geqslant 1 \qquad \text{où} \qquad \sigma^* = {}^t\bar{\sigma} \tag{4}$$

et $\tilde{K}_N$ le sous espace de $\tilde{K}$ des matrices σ avec

$$\sigma \leqslant N\,\text{Id}.$$

Notons $\tilde{\mathscr{K}}_N$ l'espace des applications

$$(s, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \sigma(s, \omega) \in \tilde{K}_N$$

qui sont non anticipantes par rapport au brownien.

Notons enfin $\tilde{\mathscr{K}} = \bigcup_N \tilde{\mathscr{K}}_N$; *$\tilde{\mathscr{K}}$ sera l'espace des contrôles kählériens*. Pour $\sigma \in \tilde{\mathscr{K}}$, existe l'intégrale stochastique

$$X_{t,}^{(\sigma,z)i} = z^i + \int_0^t \sigma^{ij}(s, \omega)\, db_j(s) \tag{5}$$

et c'est un processus stochastique à valeurs $\mathbb{C}^n$ démarrant de z à $t = 0$. *On ne résout pas ici d'équations intégrales stochastiques.*

D étant le domaine strictement pseudoconvexe de la section 1 notons $\zeta_{(\sigma,z)}(\omega)$ le temps de sortie de $X_t^{(\sigma,z)}(\omega)$ de D partant d'un point $z \in D$; f étant une fonction mesurable sur D, et φ sur ∂D posons

$$w(z, \sigma) = E\left(\int_0^{\zeta_{(\sigma,z)}} - f(X_t^{(\sigma,z)})\, dt + \varphi(X_{\zeta_{(\sigma,z)}}^{(\sigma,z)})\right), \tag{6}$$

$$u(z) = \text{Inf}\, w(z, \sigma), \tag{7}$$

où l'infimum porte sur tous les contrôles kählériens dans $\tilde{\mathscr{K}}$.

Remarque. Lorsque u est deux fois dérivable et qu'il existe un contrôle kählérien optimal indépendant de z, alors il est trivial de voir que

$$\text{Inf}\, \Delta_a u = f \qquad \text{dans } D,$$
$$u = \varphi \qquad \text{sur } \partial D,$$

(voir par exemple Fleming–Rishel [3] pour une telle dérivation formelle) et par conséquent par (3) on a résolu le problème de Monge Ampère

$$\text{dét}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_j}\right) = f^n \qquad \text{dans } D,$$
$$u = \varphi \qquad \text{au bord de } D.$$

Remarque. Jusqu'à présent il n'était pas nécessaire de supposer D strictement pseudoconvexe. Cela va apparaître dans les paragraphes suivants et ce sera la stricte pseudoconvexité et l'estimée dét $\sigma\sigma^* \geqslant 1$ qui vont jouer le rôle de stricte ellipticité dans un problème qui ne l'est pas au sens classique du terme.

3. Propriétés de continuité de la fonction u

Désormais, nous nous plaçons dans un domaine strictement pseudoconvexe $D = \{z \in \mathbb{C}^2/p(z) < 0\}$ où p est fonction C^2 et strictement plurisousharmonique au voisinage de $\bar{D}$ avec $\nabla p \neq 0$ sur ∂D. Notons $D_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}^2/p(z) < \epsilon\}$ et $\zeta^{(\epsilon)}_{(\sigma,z)}$ le temps de sortie du processus $X_t^{(\sigma,z)}$ (5) de D_ϵ.

LEMME 2. *On a*

$$E(\zeta^{(\epsilon)}_{(\sigma,z)}) \leqslant C(\epsilon - p(z)) \tag{8}$$

où C ne dépend que du domaine D.

Preuve. Projettons le processus $X^{(\sigma,z)}_{s,\omega}$ par la fonction p si $\sigma \in \tilde{\mathscr{K}}$, on note $a = \sigma\sigma^*$. On a alors par la formule d'Itô

$$p(X^{(\sigma,z)}_{s,\omega}) = p(z) + \int_0^s \sigma^{ij}(s,\omega)\left(\frac{\partial_i p}{\partial z_j}\right)(X^{(\sigma,z)}_{s,\omega})\, db_i(s)$$
$$+ \int_0^s \bar{\sigma}^{ij}\left(\frac{\partial p}{\partial \bar{z}_j}\right)(X^{(\sigma,z)}_{s,\omega})\, d\bar{b}_i(s) + \frac{1}{2}\int_0^s a_{ij}(s,\omega)\frac{\partial^2 p}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_j}(X^{(\sigma,z)}_{s,\omega})\, ds$$

Prenons $s = \zeta^{(\epsilon)}_{(0,z)} \wedge n$, prenons l'espérance; celle des martingales est 0. Prenons à la limite $n \to +\infty$. Il vient

$$\frac{1}{2} E\left(\int_0^{\zeta^{(\epsilon)}_{(\sigma,z)}} a_{ij}(s,\omega)\frac{\partial^2 p}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_j}(X^{(\sigma,z)}_{s,\omega})\, ds\right) \leqslant \epsilon - p(z).$$

Mais par le lemme 1 et la normalisation de σ puisque p est strictement plurisousharmonique près de $\bar{D}$ on déduit (8) sous forme précisée

$$E(\zeta^{(\epsilon)}_{(\sigma,z)}) \leqslant \frac{2}{n}\left(\min_{z\in D} \text{dét}\, \frac{\partial^2 p}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_j}(z)\right)^{-1/n} (\epsilon - p(z)). \tag{8}$$

LEMME 3. *La fonction $z \to E(\zeta_{(\sigma,z)})$ est continue sur $\bar{D}$ et vaut 0 sur ∂D. De plus, on a*

$$E(\zeta_{(\sigma,z)}) \leqslant C(-p(z))$$

où C est indépendant de $\sigma \in \tilde{\mathscr{K}}$ et pour tout domaine relativement compact $D' \subset D' \subset D$, elle est lipchitzienne avec constante de Lipchitz indépendante de $\sigma \in \tilde{\mathscr{K}}$.

Preuve. Le lemme 2 avec $\epsilon = 0$ donne la continuité au bord de D. Soit D_n suite d'exhaustion de D par des ouverts relativement compacts de d_n la distance de D_n à ∂D.

Soient z_1, $z_0 \in D_n$ fixés. Si $|z_1 - z_0| > d_n/2$, écrivons simplement:

$$\begin{aligned} |E(\zeta_{(\sigma,z_1)}) - E(\zeta_{(\sigma,z_0)})| &\leqslant 2C \max_D (-p) \\ &\leqslant (4C/d_n) \max_D (-p) \, |z_1 - z_0|. \end{aligned} \tag{9}$$

Si $|z_1 - z_0| < d_n/2$, remarquons que

$$X^{(\sigma,z_1)} = z_1 - z_0 + X^{(\sigma,z_0)}$$

et que $\zeta_{(\sigma,z_1)}$ est le temps de sortie de $X^{(\sigma,z_0)}$ du domaine translaté $-z_1 + z_0 + D$ et ce domaine translaté contient D_n et z_1 et z_0. De plus il existe une constante C_n telle que pour $\epsilon = C_n |z_1 - z_0|$, ∂D et $\partial(-z_1 + z_0 + D) = -z_1 + z_0 + \partial D$ soient contenus dans la couronne $\{-\epsilon < p(z) < \epsilon\}$ et $D_n \subset \{p(z) < -\epsilon\}$. Par conséquent les temps $\zeta_{(\sigma,z_i)}$ $i = 0, 1$ satisfont

$$\zeta_- \leqslant \zeta_{(\sigma,z_i)} \leqslant \zeta_+$$

où ζ_- (resp. ζ_+) est le temps de sortie de $X^{(\sigma,z_0)}$ de $D_{-\epsilon}$ (resp. $D_{+\epsilon}$). Le lemme de Itô appliqué à p donne alors

$$2\epsilon = \frac{1}{2} E\left(\int_{\zeta_-}^{\zeta_+} a_{ij}(s, \omega) \frac{\partial^2 p}{\partial z_i \, \partial \bar{z}_j} (X_{s,\omega}^{(\sigma,z)}) \, ds\right)$$

et donc si τ est temps d'arrêt de $X^{(\sigma,z_0)}$ avec $\zeta_- \leqslant \tau \leqslant \zeta_+$

$$E(\tau - \zeta_1) \leqslant C_n' \, |z_1 - z_0|$$

d'où

$$\begin{aligned} E(|\zeta_{(\sigma,z_0)} - \zeta_{(\sigma,z_1)}|) &\leqslant E(|\zeta_{(\sigma,z_0)} - \zeta_-|) + E(|\zeta_- - \zeta_{(\sigma,z_1)}|) \\ &\leqslant 2C_n' \, |z_1 - z_0| \end{aligned} \tag{10}$$

ce qui achève le lemme 3 par (9) et (10).

LEMME 4. (1) *Soit $z_0 \in \partial D$; on a*

$$E(|X_{\zeta(\sigma,z)}^{(\sigma,z)} - z_0|) \leqslant C \, |z - z_0|^{1/2} \tag{11}$$

pour $z \in D$ avec C indépendante de $z_0 \in \partial D$ et de $\sigma \in \tilde{\mathscr{K}}$.

(2) *Soit $D' \subset \bar{D}' \subset D$ domaine relativement compact de D; pour $z_1, z_0 \in D'$, on a*

$$E(| X^{(\sigma,z_0)}_{\zeta(\sigma,z_0)} - X^{(\sigma,z_1)}_{\zeta(\sigma,z_1)} |) \leqslant C(D') \, | z_1 - z_0 |^{1/2} \tag{12}$$

où $C(D')$ ne dépend que du domaine D' et pas de $\sigma \in \tilde{\mathscr{X}}$.

Preuve. (1) Soit $z_0 \in \partial D$, $z_1 \in D$

$$\begin{aligned} E(| X^{(\sigma,z_1)}_{\zeta(\sigma,z_1)} - z_0 |) &\leqslant | z_1 - z_0 | + \left(E\left(\sum_i \left| \int_0^{\zeta(\sigma,z_1)} \sum_j \sigma^{ij} \, db^j \right|^2\right)\right)^{1/2} \\ &\leqslant | z_1 - z_0 | + \left(E\left(\int_0^{\zeta(\sigma,z_1)} (\text{Trace } \sigma\sigma^*)(s, \omega) \, ds\right)\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Mais on a

$$-p(z_1) = E\left(\int_0^{\zeta(\sigma,z_1)} \sum a_{ij} \frac{\partial^2 p}{\partial z_i \, \partial \bar{z}_j} \, ds\right) \geqslant C' E\left(\int_0^{\zeta(\sigma,z_1)} (\text{Trace } a) \, ds\right) \tag{14}$$

puisque p est strictement *psh* d'où par (13) et (14) le résultat.

(2) Soit D_n comme au lemme 3, $z_1, z_0 \in D_n$. Si $| z_1 - z_0 | > d_n/2$, rien n'est à démontrer quitte à prendre une grande constante (dépendant de n). Si $| z_1 - z_0 | < d_n/2$, recommençons le raisonnement du lemme 3 en posant $\tau_0 = \zeta_{(\sigma,z_0)}$, $\tau_1 = \zeta_{(\sigma,z_1)}$ et en gardant les notations du lemme 3.

$$E(| X^{(\sigma,z_0)}_{\tau_0} - X^{(\sigma,z_1)}_{\tau_1} |) \leqslant E(| X^{(\sigma,z_0)}_{\tau_0} - X^{(\sigma,z_0)}_{\tau_1} |) + | z_1 - z_0 |, \tag{15}$$

$$E(| X^{(\sigma,z_0)}_{\tau_0} - X^{(\sigma,z_0)}_{\tau_1} |) \leqslant E(| X^{(\sigma,z_0)}_{\tau_0} - X^{(\sigma,z_0)}_{\tau_-} |) + E(| X^{(\sigma,z_0)}_{\tau_-} - X^{(\sigma,z_0)}_{\tau_1} |). \tag{16}$$

Or si $\zeta_- \leqslant \tau \leqslant \zeta_+$

$$\begin{aligned} E(| X^{(\sigma,z_0)}_{\tau_-} - X^{(\sigma,z_0)}_{\zeta_-} |^2) &= E\left(\sum_i \left| \sum_j \int_{\zeta_-}^{\zeta_+} \sigma^{ij} \, db_j \right|^2\right) \\ &= E\left(\sum_{i,j} \int_{\zeta_-}^{\tau_1} \sigma^{ij} \bar{\sigma}^{ij} \, ds\right) \qquad \text{car} \quad \zeta_- \leqslant \tau. \end{aligned}$$

Mais par Itô

$$\begin{aligned} 2C \, | z_1 - z_0 = | p(X^{(\sigma,z_0)}_{\zeta_-}) - p(X^{(\sigma,z_0)}_{\zeta_+})| &= E\left(\sum_{i,j} \frac{1}{2} \int_{\zeta_-}^{\zeta_+} a_{ij} \frac{\partial^2 p}{\partial z_i \, \partial \bar{z}_j} \, ds\right) \\ &\geqslant C' E\left(\int_{\zeta_-}^{\zeta_+} \sum_{i,j} \sigma^{ij} \bar{\sigma}^{ij}(s, \omega) \, ds\right) \\ &\geqslant C' E\left(\int_{\zeta_-}^{\tau} \sum_{i,j} \sigma^{ij} \bar{\sigma}^{ij}(s, \omega) \, ds\right), \end{aligned}$$

d'où

$$E(| X_{\tau}^{(\sigma,z_0)} - X_{\zeta_-}^{(\sigma,z_0)} |^2) \leqslant C'' \, | z_1 - z_0 |, \tag{17}$$

ce qui permet de conclure par (15)–(17). On a alors

THÉORÈME 1. *Soit f bornée uniformément continue sur D, Φ son module de continuité; soit φ continue sur ∂D, ψ son module de continuité.*

(1) *Alors u est continue sur $\bar{D}$ et vaut φ sur ∂D.*

(2) *De plus, pour $z_0 \in \partial D$, $z \in D$, on a*

$$| u(z) - u(z_0)| \leqslant C\psi(C' \, | z - z_0 |^{1/2})$$

avec C et C' indépendants de z, z_0.

(3) *D' est ouvert relativement compact de D, si z_0, $z_1 \in D'$, on a*

$$| u(z_0) - u(z_1)| \leqslant C(\Phi(| z_0 - z_1 |) + \psi(C' \, | z_0 - z_1 |^{1/2})$$

où C et C' ne dépendent que de D'.

Preuve. (1) On fixe $\sigma \in \tilde{\mathscr{K}}$ et on va démontrer les inégalités analogues pour la fonction $w(z, \sigma)$ avec des constantes C, C' indépendantes de $\sigma \in \tilde{\mathscr{K}}$ et ne dépendant dans le (2) que de D dans le (3) que de $D' \subset D' \subset D$. Le théorème se déduira immédiatement par passage à l'infimum.

(2) *Etude au bord.* Remarquons qu'on peut toujours supposer Φ et ψ concaves: on a

$$| \varphi(z_0) - E(\varphi(X_{\zeta(\sigma,z)}^{(\sigma,z)}))| \leqslant \psi(E(| X_{\zeta(\sigma,z)}^{(\sigma,z)} - z_0 |))$$

d'où la majoration par $\psi(C \, | z - z_0 |^{1/2})$ par le lemme 4. De même

$$\left| E\left(\int_0^{\zeta(\sigma,z)} f(X_{s,\omega}^{(\sigma,z)}) \, ds\right)\right| \leqslant \| f \|_{L^\infty(D)} \, E(\zeta_{(\sigma,z)})$$

et on conclut par le lemme 3. D'où le (2).

(3) *Etude dans D_n.*

$$| E(\varphi(X_{\zeta(\sigma,z_0)}^{(\sigma,z_0)}) - \varphi(X_{\zeta(\sigma,z_1)}^{(\sigma,z_1)}))| \leqslant \psi(E(| X_{\zeta(\sigma,z_0)}^{(\sigma,z_0)} - X_{\zeta(\sigma,z_1)}^{(\sigma,z_1)} |))$$

et cela est traité par le lemme 4.

De même

$$\left| E\left(\int_0^{\zeta(\sigma,z_0)} f(X_s^{(\sigma,z_0)})\, ds - \int_0^{\zeta(\sigma,z_1)} f(X_s^{(\sigma,z_1)})\, ds\right)\right|$$

$$\leqslant E\left(\int_0^{\zeta(\sigma,z_0)} |f(X_{s,\omega}^{(\sigma,z_0)}) - f(X_{s,\omega}^{(\sigma,z_1)})|\, ds\right) + E\left(\left|\int_{\zeta(\sigma,z_0)}^{\zeta(\sigma,z_1)} f(X_{s,\omega}^{(\sigma,z_1)})\, ds\right|\right).$$

Le 1er terme se contrôle par $\Phi(|z_0 - z_1|)\, E(\zeta_{(\sigma,z_0)})$ uniformément borné par le lemme 2. Le 2ème terme se contrôle par $\|f\|_{L^\infty(D)}\, E(|\zeta_{(\sigma,z_0)} - \zeta_{(\sigma,z_1)}|)$ qui se contrôle par le lemme 3.

Remarque. Dans [1], Bedford et Taylor démontrent des résultats analogues pour f et φ höldériennes. Dans [11], lorsque $f \equiv 0$, on montre que la solution du problème de Bremermann posé par φ continue est continue sans spécifier le module de continuité.

4. Principe de Bellman et plurisousharmonicité de u

Théorème 2. *Supposons $f \geqslant 0$ et f, φ bornées et telles que u soit continue sur $\bar{D}$ et $w(z, \sigma)$ continue sur $\bar{D}$ pour tout $\sigma \in \tilde{\mathscr{K}}$. Alors u est plurisousharmonique dans D.*

Ce théorème se déduit du théorème suivant connu sous le nom de principe de Bellman qui est réellement une version intégrée de l'équation de programmation dynamique.

Théorème 3. *Soit $z \in D$, τ le temps de sortie d'un domaine D' contenant z* (pour n'importe quel processus que nous considérerons). *Supposons $f \geqslant 0$, f, φ bornées telles que u soit continue sur $\bar{D}$ et $w(z, \sigma)$ continue sur $\bar{D}$ pour tout $\sigma \in \tilde{\mathscr{K}}$.*

Alors pour tout t, on a

$$u(z) = \operatorname*{Inf}_{\sigma \in \tilde{\mathscr{K}}} E\left(-\int_0^{\tau\wedge t} f(X_{s,\omega}^{(\sigma,z)})\, ds + u(X_{\tau\wedge t,\omega}^{(\sigma,z)})\right). \tag{18}$$

Déduction du théorème 2 à partir du théorème 3. Prenons D' n'importe quel domaine contenant $z \in D$ et $t = +\infty$ dans la formule (18) du théorème 3; comme $f \geqslant 0$,

$$u(z) \leqslant E(u(X_{\tau,\omega}^{(\sigma,z)})).$$

Prenons pour σ une matrice constante, comme u est continue, donc scs, u est sousharmonique pour l'opérateur $\Delta_{\mathbf{a}}$; ceci est vrai pour toute matrice $\mathbf{a}$ hermitienne $\geqslant 0$ avec dét $\mathbf{a} \geqslant 1$ donc $\sum a_{ij}(\partial^2 u/\partial z_i\, \partial \bar{z}_j) \geqslant 0$ comme mesure. Cela implique aussitôt que la matrice $\partial^2 u/\partial z_i\, \partial \bar{z}_j$ est positive par un raisonnement par l'absurde.

Avant de démontrer le théorème de Bellman, démontrons en nous inspirant de Krylov [7].

LEMME 5. *Pour les hypothèses de continuité de u dans $\bar{D}$ pour $\sigma \in \tilde{\mathscr{K}}$, alors*

$$t \to -\int_0^{t\wedge\zeta(\sigma,z)} f(X_{s,\omega}^{(\sigma,z)})\,ds + u(X_{t\wedge\zeta(\sigma,z)}^{(\sigma,z)}) \tag{19}$$

est une sous-martingale.

Preuve. Fixons $\theta < \theta + t$ deux temps certains et étudions

$$E\left(-\int_0^{(t+\theta)\wedge\zeta} f(X_s)\,ds + u(X_s) \,\Big|\, \mathscr{B}_{\theta\wedge\zeta}\right)$$

$$= -\int_0^{\theta\wedge\zeta} f(X_s)\,ds + E\left(-\int_{\theta\wedge\zeta}^{(t+\theta)\wedge\zeta} f(X_s)\,ds + u(X_{(t+\theta)\wedge\zeta}) \,\Big|\, \mathscr{B}_{\theta\wedge\zeta}\right). \tag{20}$$

Il est clair qu'on peut supposer σ étagée puis faire ensuite les passages à la limite usuels: il est alors clair aussi qu'on peut supposer σ constante sur $[\theta \wedge \zeta, (t+\theta) \wedge \zeta[$ égale à $\sigma(\theta \wedge \zeta, \omega)$; il est enfin clair que l'espérance conditionnelle du 2ème membre de (20) est égale à

$$A(y, \sigma) = E\left(-\int_0^{t\wedge\zeta} f(\sigma b_s + y)\,ds + u(\sigma b_{t\wedge\zeta} + y)\right) \tag{21}$$

où

$$\sigma \equiv \sigma(\theta \wedge \zeta, \omega),$$
$$y = X_{\theta\wedge\zeta,\omega}^{(\sigma,z)},$$

et donc le 1er membre de (20) est

$$-\int_0^{\theta\wedge\zeta} f(X_s^{(\sigma,z)})\,ds + A(X_{\theta\wedge\zeta}^{(\sigma,z)}, \sigma(\theta \wedge \zeta, \omega)).$$

A étant définie par l'identité (21). Le lemme 5 sera démontré si l'on montre

$$u(y) \leqslant A(y, \sigma) \qquad \forall y, \sigma. \tag{22}$$

car alors l'espérance conditionnelle de 1er membre de (20) sera

$$\geqslant -\int_0^{\theta\wedge\zeta} f(X_s^{(\sigma,z)})\,ds + u(X_{\theta\wedge\zeta}^{(\sigma,z)})$$

ce qui est l'inégalité des sous martingales.

Démontrons (22). Soit ϵ; alors il existe $\sigma_z \in \tilde{\mathscr{K}}$ tel que $\sigma_z\, u(z) \leqslant w(z, \sigma_z) \leqslant u(z) + 2\epsilon$.

Mais tout est continu uniformément sur $\bar{D}$. Donc on peut recouvrir $\bar{D}$ par un nombre fini d'ouverts $U_{z_1} \cdots U_{z_n}$ tels que on ait pour $z' \in U_{z_i}$

$$u(z') \leqslant w(z', \sigma_{z_i}) \leqslant u(z') + \epsilon. \tag{23}$$

Posons $\Delta_1 = U_{z_1} \cdots \Delta_i = U_{z_i} - \Delta_{i-1}$ et définissons

$$\begin{aligned} \Sigma(u, \omega) &= \sigma && \text{si} \quad u < t, \\ \Sigma(u, \omega) &= \theta_t \sigma_{z_i}(u - t, \omega) && \text{si} \quad u > t, \end{aligned} \tag{24}$$

si $y + \sigma b_t \in \Delta_i$ (θ_t est le shift temporel de t). Alors comme $\sigma_{z_i} \leqslant N_i \,\mathrm{Id}$, $\sigma \leqslant N \,\mathrm{Id}$, $\Sigma \leqslant \sup(N_i, N)$, et clairement dét $\Sigma\Sigma^* \geqslant 1$ d'où $\Sigma \in \tilde{\mathscr{K}} = \bigcup_N \tilde{\mathscr{K}}_N$.

Alors

$$\begin{aligned} u(y) &\leqslant E\left(-\int_0^{\zeta(\sigma,y)} f(X_{s,\omega}^{(y,\Sigma)})\, ds + \varphi(X_{\zeta(y\Sigma)}^{(y,\Sigma)})\right) \\ &\leqslant E\left(-\int_0^{\zeta(\sigma,y)\wedge t} f(X_{s,\omega}^{(y,\Sigma)})\, ds + u(y + X_{t,\omega}^{(y,\Sigma)}) + \epsilon\right) \end{aligned}$$

la dernière inégalité à cause de (23) et de (24). Par suite, par définition de A. $u(y) \leqslant \epsilon + A(y, \sigma)$ puisque sur $[0, t]$, $\Sigma = \sigma$. Ceci est vrai pour tout ϵ d'où (22).

Remarque. Dans ce lemme 5, la continuité de u ne sert qu'à obtenir (23) avec un nombre fini de U_{z_i} de façon à construire un contrôle kählérien Σ qui soit dans $\tilde{\mathscr{K}}_M$ pour M fixé.

On aurait pu aussi définir une autre fonction v par

$$v(z) = \operatorname{Inf} w(z, \sigma)$$

$w(z, \sigma)$ donné par (6), mais l'infimum portant sur tous les contrôles kählériens σ avec dét $\sigma\sigma^* \geqslant 1$ (mais pas nécessairement borné). Alors le théorème de 3 est encore vrai! (on n'a jamais utilisé nulle part que σ était dans un $\tilde{\mathscr{K}}_N$, i.e., borné pour les estimées de 2–4); le théorème de plurisousharmonicité, et le lemme 5 sont vrais sans hypothèse de continuité sur u. L'introduction de la classe $\tilde{\mathscr{K}} = \bigcup \tilde{\mathscr{K}}_N$ (plutôt que de la classe de tous les contrôles kählériens possibles) sera utilisée dans l'étude des équations de diffusion associées à l'équation de Monge-Ampère.

Fin du théorème 3. Pour τ temps de sortie d'un domaine, t étant fixé, le lemme 5 dit que

$$u(z) \leqslant \operatorname*{Inf}_{\sigma \in \tilde{\mathscr{K}}} E\left(-\int_0^{\tau\wedge t} f(X_{s,\omega}^{(\sigma,z)})\, ds + u(X_{\tau\wedge t,\omega}^{(\sigma,z)})\right)$$

on peut en effet stopper la sous martingale du lemme 5 car f et φ sont bornées. On peut aussi stopper au temps d'arrêt.

Maintenant pour avoir l'égalité, stopper la sous martingale du lemme 5 au temps d'arrêt $T_n = (\tau \wedge t + n) \wedge \zeta_{\sigma,z}$. Alors

$$u(z) \leqslant \operatorname*{Inf}_{\in\sigma\tilde{\mathscr{X}}} E\left(-\int_0^{T_n} f(X_{s,\omega}^{(\sigma,z)})\, ds + u(X_{T_n,\omega}^{(\sigma,z)})\right).$$

Faisons tendre $n \to +\infty$, $T_n \to \zeta_{(\sigma,z)}$ et comme $f \geqslant 0$ le 1er terme tend en décroissant vers $E(-\int_0^{\zeta(\sigma,z)} f(X_{s,\omega}^{(\sigma,z)})\, ds)$. De plus u est continu et tend vers φ au bord, donc par convergence dominée le 2ème terme tend vers $E(\varphi(X_{\zeta_{(\sigma,z)}}^{(\sigma,z)}))$ d'où

$$u(z) \leqslant \operatorname*{Inf}_{\sigma\in\tilde{\mathscr{X}}} E\left(-\int_0^{\zeta_{(\sigma,z)}} f(X_{s,\omega}^{(\sigma,z)})\, ds + \varphi(X_{\zeta_{(\sigma,z)}}^{(\sigma,z)})\right) = u(z)$$

d'où l'égalité attendue par la propriété de sous-martingale du lemme 5 par rapport à la suite T_n qui nous dit que

$$E\left(-\int_0^{T_n} f(X_{s,\omega}^{(\sigma,z)})\, ds + u(X_{T_n,\omega}^{(\sigma,z)})\right)$$

est une suite croissante en n.

5. Résolution généralisée de l'équation de Monge Ampère

Théorème 4. *Supposons D strictement pseudoconvexe borné défini par $\{p < 0\}$ où p est fonction C^2 strictement plurisousharmonique dans D. Soit f bornée positive uniformément continue sur D, φ continue sur ∂D. Alors la fonction u* (donnée par 7) *est fonction continue pour $\bar{D}$ plurisousharmonique dans D et est solution généralisée du problème*

$$\begin{aligned} (i\partial\bar{\partial}u)^{\wedge n} &= ((2/n)f)^n && \textit{sur } D, \\ u &= \varphi && \textit{sur } \partial D. \end{aligned} \tag{25}$$

Preuve. La démonstration de ce théorème utilise les résultats de Bedford et Taylor que nous avons rappelés au 1. Considérons la classe $\mathscr{B}_c(f, \varphi)$; rappelons que c'est la classe des fonctions v plurisousharmoniques continues dans D telles que:

$$\begin{aligned} \limsup_{z\to z_0\in\partial D} v(z) &\leqslant \varphi(z_0) && \text{sur } \partial D, \\ \Phi(v) &\geqslant (2/n) f && \text{sur } D, \end{aligned} \tag{26}$$

avec la définition de Φ rappelée au 1 (voir [1])

$$\text{Soit} \quad w(z) = \sup v(z) \qquad \text{pour} \quad v \in \mathscr{B}_c(f, \varphi). \tag{27}$$

On a

LEMME 6. *On a* $u(z)$ *défini par* (6) *est égal à* $w(z)$ *défini par* (27).

Finissons alqrs le théorème 4. Elle est semblable à la preuve du dernier théorème de Bedford et Taylor [1] (plus précisément, ils démontrent que si le supremum de la classe $\mathscr{B}(f, \varphi)$ est continu sur $\bar{D}$ et vaut φ sur ∂D, alors ce supremum est solution de (25)). Ici nous ne regardons que la sous classe $\mathscr{B}_c(f, \varphi) \subset \mathscr{B}(f, \varphi)$ avec la propriété supplémentaire de continuité. On va montrer que $(\partial\bar{\partial}w)^{\wedge n} = ((2/n) f)^n$ $(\partial\bar{\partial}w)^{\wedge n}$ a un sens car $w = u$ par le lemme 6 et u est continu plurisousharmonique). Soit $z_0 \in D$ $\overline{\mathscr{B}(z_0, p)} \subset D$ et v psh sur $\overline{\mathscr{B}(z_0, p)}$ continu sur $\mathscr{B}(z_0, p)$ avec

$$\begin{aligned} v &= w && \text{sur} \quad \partial\mathscr{B}(z_0, p), \\ \Phi(v) &= (2/n) f && \text{sur} \quad \mathscr{B}(z_0, p), \\ (\partial\bar{\partial}v)^{\wedge n} &= ((2/n) f)^n && \text{sur} \quad \mathscr{B}(z_0, p), \end{aligned}$$

v existe car on sait résoudre le problème de Monge Ampère pour le cas de la boule. Or w est continu psh, donc $\Phi(w)^n \leqslant (\partial\bar{\partial}w)^{\wedge n}$, d'où $(\partial\bar{\partial}w)^{\wedge n} \geqslant ((2/n) f)^n = (\partial\bar{\partial}v)^{\wedge n}$ sur $\mathscr{B}(z_0, p)$. Par le principe du minimum pour l'équation de Monge Ampère dans la boule, $w \leqslant v$ sur $\overline{\mathscr{B}(z_0, p)}$. Soit alors

$$\begin{aligned} W &= v && \text{sur} \quad \overline{\mathscr{B}(z_0, p)}, \\ &= w && \text{sur} \quad \bar{D} - \mathscr{B}(z_0, p). \end{aligned}$$

Alors W est continu sur $\bar{D}$, psh. sur D, vaut φ sur ∂D et $\Phi(W) \geqslant (2/n) f$, d'où $W \in \mathscr{B}_c(f, \varphi)$ et donc $W \leqslant w$. Or par construction et puisque $v \geqslant w$, $W \geqslant w$, d'où $W = w$ et donc $W = w = v$ sur $\mathscr{B}(z_0, p)$, d'où

$$(\partial\bar{\partial}w)^{\wedge n} = (\partial\bar{\partial}v)^{\wedge n} = ((2/n) f)^n \qquad \text{sur} \quad \mathscr{B}(z_0, p).$$

Montrons maintenant le lemme 6. (1) On va montrer que $u \geqslant w$ en montrant que si $v \in \mathscr{B}_c(f, \varphi)$, alors $v \leqslant u$ dans D. Posons $\partial_i\bar{\partial}_j v = f_{i\bar{j}}\, dv + v_{i\bar{j}}$ où $v_{i\bar{j}}$ est étrangère à dv, $f_{i\bar{j}} \in L^1_{\text{loc}}$ et dv est le volume euclidien. D'après les résultats rappelés au 1, on a

$$\Phi(v) = \text{dét}(f_{i\bar{j}})^{1/n}$$

et de plus si v_ϵ est régularisée psh. C^2 standard de v (définie à priori dans $D_{-\epsilon}$), on a

$$\Phi(v_\epsilon) \to \Phi(v) \qquad \text{pp.}$$

D'autre part, on a par Itô et pour tout $\sigma \in \tilde{\mathscr{K}}$

$$v_\epsilon(z) = E\left(-\int_0^{\zeta^{(-\epsilon)}_{(\sigma,z)}} \frac{1}{2}\, a_{ij}(s,\omega)\, \frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_j}\, (X^{(\sigma,z)}_{s,\omega})\, ds + v_\epsilon(X^{(\sigma,z)}_{\zeta^{(-\epsilon)}_{(\sigma,z)}})\right)$$

et par le lemme 1

$$v_\epsilon(z) \leqslant E\left(-\int_0^{\zeta^{(-\epsilon)}_{(\sigma,z)}} (n/2)\, \Phi(v_\epsilon)(X^{(\sigma,z)}_{s,\omega})\, ds + v_\epsilon(X^{(\sigma,z)}_{\zeta^{(-\epsilon)}_{(\sigma,z)}})\right)$$

puis par le lemme de Fatou si $\epsilon \to 0$

$$v(z) \leqslant E\left(-\int_0^{\zeta^{(-\epsilon)}_{(\sigma,z)}} (n/2)\, \Phi(v)(X^{(\sigma,z)}_{s,\omega})\, ds + v(X^{(\sigma,z)}_{\zeta^{(-\epsilon)}_{(\sigma,z)}})\right).$$

Mais $\Phi(v) \geqslant (2/n) f$ et v a une lim sup au bord $\leqslant \varphi$ et $X_s^{(\sigma,z)}$ est à trajectoires continues, d'où

$$v(z) \leqslant E\left(-\int_0^{\zeta_{(\sigma,z)}} f(X^{(\ ,z)}_{s,\omega})\, ds + \varphi(X^{(\sigma,z)}_{\zeta_{(\sigma,z)}})\right) = w(z,\sigma).$$

Par suite $v(z) \leqslant u(z)$ par définition (6) de u.

② Montrons maintenant que $u \in \mathscr{B}_c(f, \varphi)$ ce qui montrera que $u = w$. Pour tout opérateur kählérien $\Delta_{\mathbf{a}}$ à coefficients constants $\mathbf{a} \in \tilde{\mathscr{K}}_N$, tout domaine $B \subset D$, notons $G_{\mathbf{a}}{}^B$ le potentiel de Green de $\Delta_{\mathbf{a}}$ relatif à B et comme u est psh ainsi que nous le savons, on peut écrire

$$\Delta_{\mathbf{a}} u = \mu_{\mathbf{a}} \geqslant 0 \tag{28}$$

puisque u est sousharmonique pour $\Delta_{\mathbf{a}}$.

Maintenat soit $z \in D$, B autour de z, τ le temps de sortie de B et appliquons le principe de Bellman (18) en majorant l'infimum du membre de droite de (18) par le contrôle $\sigma = a^{1/2}$ constant. Alors on obtient aussitôt l'inégalité

$$-G_{\mathbf{a}}{}^B \mu_{\mathbf{a}} \leqslant -G_{\mathbf{a}}{}^B f. \tag{29}$$

Ceci est vrai pour tout domaine aussi petit soit-il B; posons

$$\partial_i \partial_{\bar{j}} u = \varphi_{i\bar{j}}\, dv + v_{i\bar{j}}$$

$\varphi_{ij} \in L^1_{\text{loc}}$, $v_{i\bar{j}}$ étrangère à dv.

Alors

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{a}} &= \tfrac{1}{2}\left(\sum a_{ij}\varphi_{i\bar{j}}\right) dv + \tfrac{1}{2} \sum a_{ij} v_{i\bar{j}} \\ &\equiv \varphi_{\mathbf{a}}\, dv + v_{\mathbf{a}} \end{aligned} \tag{30}$$

où $\varphi_a \in L^1_{loc}$ et v_a est étrangère à dv. Nous déduisons alors du théorème 5 suivant de (29) que

$$f \leqslant \varphi_a \tag{31}$$

d'où par (30) et le lemme 1

$$f \leqslant \tfrac{1}{2} \inf_{\{a/\det a \geqslant 1\}} \sum a_{ij}\varphi_{ij} = (n/2)(\text{dét } \varphi_{ij})^{1/n}.$$

Or comme u est continu psh, d'après les résultats rappelés au 1, $(\text{dét } \varphi_{ij})^{1/n} = \Phi(u)$ d'où $\Phi(u) \geqslant f$. Comme on sait déjà que u tend vers au bord de D, on a $u \in \mathscr{B}_c(f, \varphi)$ ce qui achève le lemme 6 et donc le théorème 4.

Il nous faut encore démontrer le théorème 5 suivant que nous utiliserons pour déduire (31) de (29).

THÉORÈME 5. *Soit Δ_a opérateur elliptique du 2ème ordre à coefficients constants sur un domaine D de R^n $n \geqslant 3$. μ une mesure sur D de signe quelconque; pour tout ouvert relativement compact de D, soit $G_a{}^U$ le potentiel de Green de U relatif à Δ_a (celui qui est surharmonique donc à noyau $\geqslant 0$).*

Supposons que pour tout U relativement compact de D $G_a{}^U\mu \geqslant 0$. Alors la densité de μ par rapport à la mesure de Lebesgue est $\geqslant 0$ pp.

Preuve. D'abord on peut se restreindre au cas où μ est de masse totale finie quitte à regarder $\mu|_{D_n}$ où D_n est suite d'ouverts relativement compacts qui croît vers D. Posons donc

$$d\mu = f\,dx + dv$$

où $f \in L^1$ et dv est étrangère à dx. D'autre part un changement de coordonnées nous ramène aussitôt au cas du laplacien euclidien standard et donc des potentiels de Green standard.

LEMME 7. *Supposons v étrangère à dx. Alors pour presque tout $x \in D$,*

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{(G^{B(s,\eta)}v)(x)}{\eta^2} = 0.$$

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Pour presque tout $x \in D$, il existe δ tel que $|v(B(x, \eta))| < \eta^n \epsilon$ pour $0 \leqslant \eta < \delta$ (voir [12]). Posons $\varphi(p) = v(B(x, p))$ et prenons $\eta < \delta$. Alors

$$(G^{(B(x,\eta))}v)(x) = \int_0^\eta d\varphi(p)\left(\frac{1}{p^{n-2}} - \frac{1}{\eta^{n-2}}\right) = (n-2)\int_0^\eta \varphi(p)\,\frac{1}{p^{n-1}}\,dp\,.$$

D'où pour tout ϵ'

$$\limsup_{\eta \to 0} \frac{(G^{B(x,\eta)}v)(x)}{\eta^2} < \epsilon'.$$

Changeant v en $-v$, on a $\liminf \cdots > -\epsilon''$ d'où le lemme.

LEMME 8. *Soit f une fonction $L^1(D)$. Posons*

$$f_\eta(x) = \frac{C_n^{-1}}{\eta^2}(G^{B(x,\eta)}f)(x) \qquad \textit{définie sur } D_\eta \textit{ où } \quad C_n = \sigma_{n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)$$

$D_\eta = \{z \in D/d(z, \partial D) > \eta\}$. Alors on a $\|f_\eta - f\|_{L^1} \to 0$ et donc il existe une sous suite $\eta_k \to 0$ avec $f_{\eta_k} \to f$ presque partout.

Preuve. Remarquons que

$$(G^{B(x,\eta)}\mathbb{1}_{B(x,\eta)})(x) = \sigma_{n-1}\int_0^\eta \left(\frac{1}{p^{n-2}} - \frac{1}{\eta^{n-2}}\right)p^{n-1}dp.$$

$$= C_n\eta^2$$

et donc f_η étant définie seulement sur D_η on a si $\eta < \eta_0$

$$\|f_\eta - f\|_{L^1(D_{\eta_0})}$$

$$= \frac{1}{C_n\eta^2}\int_{D_{\eta_0}} dx \mid G^{B(x,\eta)}(f - f(x))(x)\mid dx$$

$$\leqslant \frac{1}{C_n\eta^2}\int_{D_{\eta_0}} dx \int \left(\frac{1}{\mid z\mid^{n-2}} - \frac{1}{\eta^{n-2}}\right)\mid f(x-z) - f(x)\mid_{B(0,\eta)}(z)\, dz$$

$$\leqslant \max_{z\in B(0,\eta)} \|f(\cdot - z) - f(\cdot)\|_{L^1(D_{\eta_0})},$$

(**) et ceci tend vers 0 si $\eta \to 0$ puisque $f \in L^1(D)$.

Preuve du théorème 5. On a par hypothèse pour tout x, tout η $(1/C_n\eta^2)\, G^{B(x,\eta)}\mu \geqslant 0$. Mais si $\eta \to 0$ $(1/\eta^2)(G^{B(x,\eta)}v)(x) \to 0$ pp et en prenant une sous suite $(1/C_n\eta^2)(B^{B(x,\eta)}f)(x) \to f(x)$ d'où $f(x) \geqslant 0$ pp.

Remarques 2. (1) En fait dans le lemme 8, on a un théorème de dérivation de Lebesgue qui permet de dire que $f_\eta \to f$ pp.

(2) Il est vraisemblable que $G^U\mu \geqslant 0$ pour tout $U \subset D$ implique $\mu \geqslant 0$ (et pas seulement la partie à densité de μ) et cela doit pouvoir se voir par balayage. Cependant nous n'avons pas de preuves rigoureuses.

Preuve de (**). Montrons que pour f continue à support compact dans D. Alors pour $z \in B(0, \eta)$ assez petit le support de $f(\cdot - z)$ reste dans un compact donné de D et par continuité uniforme $\mid f(\cdot - z) - f(\cdot)\mid \to 0$ uniformément sur D_{η_0} (η_0 étant fixé), d'où $\int_{D_{\eta_0}} \mid f(x-z) - f(x)\mid dx \to 0$ uniformément si

$|z| \to 0$. Si $f \in L^1(D)$, soit $\epsilon > 0$ et f_0 à support compact dans D avec $\int_D |f - f_0| \, dx < \epsilon$. Alors

$$\int_{D_{\eta_0}} |f(x-z) - f(x)| \, dx \leqslant \int_{D_{\eta_0}} |f(x-z) - f_0(x-z)| \, dx + \int_{D_{\eta_0}} |f_0(x-z) - f_0(x)| \, dx + \int_{D_{\eta_0}} |f(x) - f_0(x)| \, dx.$$

Mais $\int_{D_{\eta_0}} |f(x-z) - f_0(x-z)| \, dx \leqslant \int_D |f(x) - f_0(x)| \, dx \leqslant \epsilon$ si $|z| < \eta < \eta_0$; donc le 1er et le 3ème terme sont $< \epsilon$. Le 2ème terme est $< \epsilon$ si η est assez petit à cause de la continuité de f_0.

De notre formule pour la résolution de (25) nous déduisons un principe de restriction qui s'énonce ainsi:

COROLLAIRE 1. *Soit toujours D strictement pseudoconvexe, φ continue sur ∂D, f bornée uniformément continue sur D et w la solution du problème* (25). *Soit $D' \subset \bar{D}' \subset D$ et soit le problème*

$$\begin{aligned} (\partial\bar{\partial} w_1)^{\wedge n} &= f^n \qquad \textit{dans } D', \\ w_1 &= w \qquad \textit{au bord de } \partial D'. \end{aligned} \tag{2)-(25}$$

Alors $w_1 = w|_{D'}$.

Preuve. Cela résulte de l'expression de w et w_1 comme solution du problème de contrôle (7) et du principe de Bellman avec le temps d'arrêt τ de sortie de D': en effet on a pour $z \in D'$

$$w(z) = \operatorname{Inf} E\left(-\int_0^\tau f(X_{s,\omega}^{(\sigma,z)}) \, ds + w(X_\tau^{(\sigma,z)})\right)$$

où $\sigma \in \tilde{\mathscr{K}}$, ce qui exprime que w est solution dans D' du problème (25) et par unicité de ce problème dans la classe des fonctions psh, $w = w_1$.

6. Cas de la boule; la fonction de synthèse

Considérons la classe $\tilde{K}_N$ des fonctions

$$\sigma \colon z \in D \to \sigma_{ij}(z) \in \tilde{K}$$

(avec dét $\sigma\sigma^* \geqslant 1$ et $\sigma \leqslant N \, \mathrm{Id}$).

On peut alors *résoudre* l'équation stochastique suivante dans D

$$X_s^{(\sigma,z)^i} = z^i + \int_0^s \sigma^{ij}(X_{t,\omega}^{(\sigma,z)})\, db_j(t) \tag{32}$$

et considérer

$$\mathbf{u}(z) = \operatorname*{Inf}_{\sigma \in U\tilde{\mathscr{K}}_N} E\left(-\int_0^{\zeta(\sigma,z)} f(X_{s,\omega}^{(\sigma,z)})\, ds + \varphi(X_{\zeta(\sigma,z)}^{(\sigma,z)})\right). \tag{33}$$

Clairement comme $(s, \omega) \to \sigma^{ij}(X_{s,\omega}^{(\sigma,z)})$ est dans la classe de contrôle kählérien $\tilde{\mathscr{K}}$, on a

$$u(z) \leqslant \mathbf{u}(z). \tag{34}$$

Supposons que la solution w du problème de Monge Ampère existe et soit $L_{2,\mathrm{loc}}^{\infty}$ (comme c'est le cas dans la boule si f et φ sont C^2). Alors prenons pour $\sigma_{ij} = (\partial_i \bar{\partial}_j w)^{1/n} / (\text{dét}(\partial_i \bar{\partial}_j w))^{1/n}$; d'après Krylov [7] il existe une solution (peut être plusieurs d'ailleurs) à (32). Mais clairement on voit que

$$u(z) = w(z) = E\left(-\int_0^{\zeta(\sigma,z)} f(X_{s,\omega}^{(\sigma,z)})\, ds + \varphi(X_{\zeta(\sigma,z)}^{(\sigma,z)})\right) = \mathbf{u}(z).$$

(C'est la définition même du problème de Monge Ampère!!)

Par suite dans cecas, on a un contrôle kählérien optimal σ donné par w elle-même par la formule précédente.

7. Résolution d'équations de Monge Ampère avec second membre non linéaire

Nous allons considérer dans ce paragraphe, des problèmes du type suivant

$$\begin{aligned} (i\partial\bar{\partial}u)^{\wedge n} &= ((2/n)\, f(z, u))^n \qquad && \text{dans } D, \\ u(z) &= \varphi(z) && \text{sur } \partial D, \end{aligned} \tag{35}$$

pour u psh. Sous des hypothèses supplémentaires liant D, f, φ, nous allons montrer que ce problème a une solution psh continue en utilisant les théorèmes d'existence et d'estimation des paragraphes précédents.

Notations et hypothèses. D est strictement pseudoconvexe défini par $\{p(z) < 0\}$. On pose

$$M(D) = \frac{\max_{z \in D}(-p(z))}{\min_{z \in D}(\text{dét}(\partial^2 p / \partial z_i\, \partial \bar{z}_j)(z))^{1/2}}. \tag{36}$$

On suppose que f est fonction définie sur $D \times \mathbb{R}$ et uniformément continue sur D pour tout $u \in \mathbb{R}$ fixé. On pose pour tout $u \in R$

$$\|f\|_{\infty,u} = \max_{\substack{z\in D \\ v\in[-u,+u]}} |f(z, v)|,$$
$$\|f\|_{\mathrm{lip},u} = \max_{z\in D\in v,\ v'\in[-u,+u]} \max \frac{|f(z, v) - f(z, v')|}{|v - v'|}. \tag{37}$$

THÉORÈME 5. *Supposons qu'il existe $u \in \mathbb{R}^+$ avec*

$$M(D)\|f\|_{\infty,u} + \|\varphi\|_{L^\infty(D)} \leqslant u,$$
$$M(D)\|f\|_{\mathrm{lip},u} < 1. \tag{38}$$

Alors (35) *a une solution u_0* psh *sur D continue sur $\bar{D}$ avec $\|u_0\|_{\mathscr{C}(D)} \leqslant u$.*

Preuve. Pour toute fonction $v(z) \in \mathscr{C}(\bar{D})$, pour tout contrôle kählérien $\sigma \in \tilde{\mathscr{X}}$, posons

$$w(z, \sigma, v) = E\left(-\int_0^{\zeta(\sigma,z)} f(X_s^{(\sigma,z)}, v(X_s^{(\sigma,z)}))\,ds + \varphi(X_{\zeta(\sigma,z)}^{(\sigma,z)})\right),$$
$$u(z, v) = \operatorname*{Inf}_{\sigma\in\tilde{\mathscr{X}}} w(z, \sigma, v). \tag{39}$$

Comme v est continu sur $\bar{D}$, $f(z, v(z))$ est alors uniformément continu sur D, borné sur D et donc $u(z, v)$ est psh sur D, continu $\bar{D}$ et satisfait

$$(\partial\bar{\partial}u)^{\wedge n} = f(z, v(z)) \qquad \text{dans } D,$$
$$u = \varphi \qquad \text{sur } \partial D,$$

à cause du théorème 4. Considérons l'application $v \in \mathscr{C}(\bar{D}) \to u(\cdot, v) \in \mathscr{C}(\bar{D})$ et montrons qu'elle a un point fixe ce qui achèvera le théorème. Or

$$\|w(\cdot, v)\|_{\mathscr{C}(\bar{D})} \leqslant \|\varphi\|_{\mathscr{C}(\partial D)} + \|f\|_{\infty,\|v\|} E(\zeta_{(\sigma,z)}).$$

Mais le lemme 2 et (8) montre que $E(\zeta_{(\sigma,z)}) \leqslant M(0)$ et donc

$$\|u(\cdot, v)\|_{\mathscr{C}(\bar{D})} \leqslant M(D)\|f\|_{\infty,\|v\|} + \|\varphi\|_{\mathscr{C}(\partial D)}. \tag{40}$$

D'autre part si $\|v\|$, $\|v'\| \leqslant v_0$

$$|w(z, \sigma, v) - w(z, \sigma, v')| \leqslant M(D)\|f\|_{\mathrm{lip},v_0}\|v - v'\|_{\mathscr{C}(\bar{D})}$$

et par suite cela passe à l'infimum avec la même constante de Lipchitz

$$|u(z, v) - u(z, v')| \leqslant M(D)\|f\|_{\mathrm{lip},v_0}\|v - v'\|_{\mathscr{C}(\bar{D})}. \tag{41}$$

Par conséquent soit la boule de centre 0 et de rayon u dans $\mathscr{C}(\bar{D})$ avec u comme en (38). Alors par (40) et (41) l'application $v \in B(0, u) \to u(\cdot, v)$ est contractante de la boule dans elle même, donc par le théorème de Picard elle a un point fixe u_0 ; on a

$$u_0(z) = u(z, u_0(z))$$

d'où u_0 est solution de (35).

EXEMPLE. Si D est boule de rayon R de centre 0, prenons $p(z) = |z|^2 - R^2$ de sorte que $\max_D(-p) = R^2$ et $M(D) = R^2$. Prenons $\varphi = 0$ par exemple. Alors (38) sera certainement réalisé pour R assez petit.

Remarque. (1) Des applications du problème (35) seront traitées ultérieurement; Bedford et Taylor traitent des problèmes du type (35) avec f lipchitzienne convexe croissante en u sans hypothèse sur la taille de D.

(2) Les équations de diffusion dans la classe des plurisousharmoniques et des équations de Monge Ampère de type plus général paraîtront dans une publication ultérieure.

RÉFÉRENCES

1. E. BEDFORD AND B. A. TAYLOR, A Dirichlet problem for a complex Monge Ampère equations, *Invent. Math.* (1976).
2. H. BREMERMANN, On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudoconvex domains: Characterization of Silov boundary, *Trans. Amer. Math. Soc.* (1959), 246.
3. FLEMING ET RISHEL, "Stochastic and Deterministic Optimal Control," Springer–Verlag, New York/Berlin, 1974.
4. B. GAVEAU, Méthodes de controle optimal en analyse complexe et en topologie, *C. R. Acad. Sci. Paris* **284** (1977), 29.
5. B. GAVEAU, Méthodes de contröle optimal en analyse complexes : résolution d'équations de Monge Ampère complexe, *C. R. Acad. Sci. Paris* **284** (1977), 593.
6. A. KORANYI AND P. MALLIAVIN, *Acta Math.* (1975).
7. N. KRYLOV, On Itö's stochastic integral equations, *Theoret. Prob. Appl.* **14** (1969), 330.
8. P. MALLIAVIN, Comportement à la frontière distinguée des fonctions analytiques de plusieurs variables, *C. R. Acad. Sci. Paris,* février (1969).
9. P. MALLIAVIN, Diffusion et géométrie différentielle globale, *C.I.M.E.* (1975).
10. M. NISIO, Remarks on stochastic optimal control, *Japanese J. Math.* (1976).
11. J. WALSH, Continuity of plurisubharmonic envelopes, *J. Math. Mech.* (1968).
12. A. ZYGMUND, Trigonometric series (Cambridge).